Công thức Fubini

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 23 tháng 10 năm 2025

Với miền bị chặn, liên tục trừ ra một tập có thể tích không thì khả tích

Định lý (3.7)

Nếu tập con $D \subset \mathbb{R}^n$ có thể tích, hàm f xác định và bị chặn trên D, và tập điểm không liên tục của f có thể tích không, thì f khả tích trên D.

Chứng minh.

Cho I là hình hộp chứa D và F là mở rộng của f lên I, bằng không ngoài D. Khi đó, tích phân $\int_D f$ tồn tại khi và chỉ khi $\int_I F$ tồn tại.

Gọi C là tập mà f không liên tục trên D. Theo giả thiết, tập C có thể tích không.

Gọi E là tập mà F không liên tục trên I. Như vậy, tập E chứa C và *có thể* chứa những điểm trên biên của D, nghĩa là $E \subset (C \cup \partial D)$.

Theo Định lý 3.3, vì D có thể tích nên ∂D có thể tích không. Vì vậy, $C \cup \partial D$ là tập có thể tích không, nghĩa là E là tập có thể tích không.

Do đó, hàm F liên tục trên I trừ ra tập E có thể tích không nên khả tích. □

Tóm tắt về tích phân trên miền tổng quát

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ bị chặn.

- *Định nghĩa*: Hàm f khả tích trên D khi và chỉ khi f khả tích trên bất kỳ hình hộp I chứa D.
- Tập D có thể tích n-chiều khi và chỉ khi ∂D (biên của D) có thể tích n-chiều không.
- Với tập D có thể tích n-chiều, nếu hàm f bị chặn và liên tục trên D trừ ra một tập có thể tích n-chiều không, thì f khả tích trên D.
- *Điều kiện cần và đủ*: Với tập D có thể tích, hàm f khả tích trên D khi và chỉ khi f bị chặn và liên tục hầu khắp trên D.
- Với f và g bị chặn trên D và $f = g$ trừ ra một tập có thể tích không, khi đó, f khả tích khi và chỉ khi g khả tích và $\int_D f = \int_D g$.
- Với tập $C \subset D$ có thể tích không và f bị chặn trên D, hàm f khả tích trên D khi và chỉ khi f khả tích trên $D \setminus C$ và $\int_D f = \int_{D\setminus C} f$.
- Cho tập D_1 và D_2 bị chặn. Giả sử $D_1 \cap D_2$ có thể tích không. Nếu f khả tích trên D_1 và trên D_2, thì f khả tích trên $D_1 \cup D_2$ và $\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$.

Dẫn nhập: Công thức Fubini

Một tích phân của tích phân được gọi là một tích phân lặp (iterated integral).

Ví dụ: *Tính tích phân lặp:*

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^2 (x^2 y + x y^2)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Ta lần lượt thực hiện phép tính tích phân từ trong ra ngoài:

$$I = \int_0^1 \left(x^2 \frac{y^2}{2} + x \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=1}^{y=2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} x^2 + \frac{7}{3} x \right) \mathrm{d}x = \frac{5}{3}. \qquad \square$$

Công thức Fubini đưa bài toán tính tích phân bội về bài toán tính tích phân của hàm một biến.

Định lý (công thức Fubini)

Cho A là một hình hộp trong $\mathbb{R}^m$ và B là một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$. Cho f khả tích trên hình hộp $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$.

Giả sử với mỗi $x \in A$, tích phân $\int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}y$ tồn tại. Khi đó,

$$\int\limits_{A\times B} f = \int\limits_A \left(\int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Tương tự, giả sử với mỗi $y \in B$, tích phân $\int\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x$ tồn tại. Khi đó,

$$\int\limits_{A\times B} f = \int\limits_B \left(\int\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Chứng minh

Ta chứng minh tương tự như với tổng Riemann nhưng sử dụng tổng trên và tổng dưới, chứ không dùng giá trị tại điểm đại diện.

Gọi P là một phép chia bất kỳ của hình hộp $A \times B$, nên $P = P_A \times P_B$ là tích của một phép chia P_A của A và một phép chia P_B của B.

Với công thức thứ nhất, xét tích phân ở vế phải:

$$\int_A \left(\int_B f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x.$$

Tổng dưới của tích phân bên ngoài là:

$$\begin{aligned}
L\left(\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}y, P_A\right) &= \sum_{R_A}\left(\inf_{x\in R_A}\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)|R_A| \\
&\geq \sum_{R_A}\left(\inf_{x\in R_A} L(f(x,\cdot),P_B)\right)|R_A| \\
&= \sum_{R_A}\left(\inf_{x\in R_A}\sum_{R_B}\left[\inf_{y\in R_B} f(x,y)\right]|R_B|\right)|R_A| \\
&\geq \sum_{R_A}\left(\inf_{x\in R_A}\sum_{R_B}\left[\inf_{R_A\times R_B} f(x,y)\right]|R_B|\right)|R_A| \\
&= \sum_{R_A}\left(\sum_{R_B}\left[\inf_{R_A\times R_B} f(x,y)\right]|R_B|\right)|R_A| \\
&= \sum_{R_A\times R_B}\inf_{R_A\times R_B} f(x,y)|R_A||R_B| \\
&= \sum_{R_A\times R_B}\inf_{R_A\times R_B} f(x,y)|R_A\times R_B| = L(f,P).
\end{aligned}$$

Như vậy, ta đã chứng minh

$$L\left(\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}y, P_A\right) \geq L(f,P).$$

Thực hiện tương tự với tổng trên của tích phân bên ngoài bằng cách thay inf bằng sup, ta được

$$U\left(\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}y, P_A\right) \leq U(f,P).$$

Vì f khả tích trên $A \times B$, nên điều kiện Cauchy về sự khả tích cho ta: $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$, và vì vậy,

$$U\left(\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}y, P_A\right) - L\left(\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}y, P_A\right) < U(f,P) - L(f,P) < \epsilon,$$

nghĩa là tích phân ở vế phải của công thức thứ nhất tồn tại, và bằng với giá trị của tích phân ở vế trái. Ta chứng minh tương tự cho công thức thứ hai để suy ra định lý. □

Ví dụ

Tính tích phân:

$$\int_{[0,1]\times[2,4]} x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Vì hàm $(x, y) \mapsto x$ liên tục trên hình chữ nhật $[0, 1] \times [2, 4]$, nên tích phân đã cho tồn tại. Áp dụng công thức Fubini, ta có:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{[0,1]\times[2,4]} x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_2^4 x \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 xy\Big|_{y=2}^{y=4} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 2x \,\mathrm{d}x \\
&= x^2\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ta cũng có thể áp dụng công thức Fubini theo thứ tự khác:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{[0,1]\times[2,4]} x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \int_2^4 \left(\int_0^1 x \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_2^4 \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y \\
&= \int_2^4 \frac{1}{2} \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} y \Big|_{y=2}^{y=4} \\
&= 1.
\end{aligned}$$



Hệ quả (thể tích của miền dưới đồ thị)

Giả sử f là hàm xác định và $f \geq 0$ trên miền bị chặn $D \subset \mathbb{R}^n$. Gọi E là khối dưới đồ thị của f và bên trên miền D, tức là

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,|\, x \in D, \, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

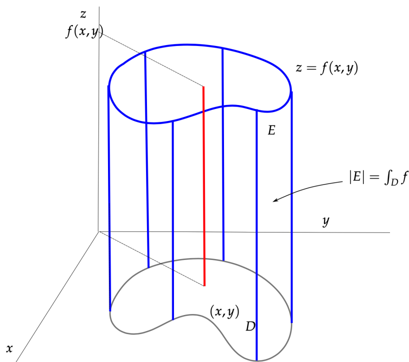
Nếu E có thể tích thì f khả tích và thể tích của E bằng tích phân của f trên D:

$$|E| = \int_D f.$$

<u>Ghi chú</u>: Thể tích bên dưới đồ thị bằng tích phân của hàm.

Trong trường hợp hàm một biến, diện tích bên dưới đồ thị $y = f(x) \geq 0$ với $a \leq x \leq b$ được định nghĩa bằng tích phân $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chứng minh



Vì tập E có thể tích nên bị chặn, và vì vậy, tồn tại một hình hộp chữ nhật chứa E.

Giả sử hình hộp đó là $I \times [0, c]$, với $I \subset \mathbb{R}^n$ là một hình hộp n-chiều chứa D và c đủ lớn.

Áp dụng công thức Fubini, ta có:

$$|E| = \int_E 1 = \int_{I \times [0,c]} \chi_E$$

$$= \int_I \left(\int_0^c \chi_E(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Nếu $x \in I \backslash D$ thì $\chi_E(x,y) = 0 \ \forall y \in [0,c]$, nên

$$\int_0^c \chi_E(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \quad \forall x \in I \backslash D.$$

Nếu $x \in D$ thì $\chi_E(x,y) = 1$ khi và chỉ khi $0 \leq y \leq f(x)$, nên

$$\int_0^c \chi_E(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{f(x)} 1\,\mathrm{d}y = f(x).$$

Theo Định lý Fubini thì f khả tích và

$$|E| = \int_D \left(\int_0^c \chi_E(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_D f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Đây là điều phải chứng minh. □

Ví dụ: diện tích tam giác vuông

Tính diện tích hình tam giác D với các đỉnh tại $(0,0)$, $(a,0)$, và $(0,b)$ với $a,b>0$.

Tam giác D là miền bên dưới đồ thị $y = b - \frac{b}{a}x$ với $0 \leq x \leq a$.

Như vậy, diện tích của tam giác D là:

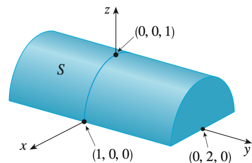
$$|D| = \int_0^a \left(b - \frac{b}{a}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}ab.$$



Ví dụ

Nếu $R = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 2\}$, *tính tích phân sau:*

$$\iint_R \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}A.$$



Ta tính tích phân bằng cách xem đây là thể tích của hình khối. Nếu $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2} \ge 0$ thì $x^2 + z^2 = 1$ và $z \ge 0$.

Như vậy, ta có nửa hình tròn trong mặt phẳng xz. Vì y không có trong công thức $f(x,y)$, nên ta 'kéo dài' đồ thị theo chiều trục y từ -2 đến 2.

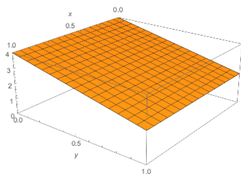
Do đó, tích phân đã cho chính là thể tích của hình khối nằm dưới hình trụ $x^2 + z^2 = 1$ và phía trên hình chữ nhật R, nghĩa là:

$$\iint_R \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\pi(1)^2 \cdot 4 = 2\pi.$$



Ví dụ

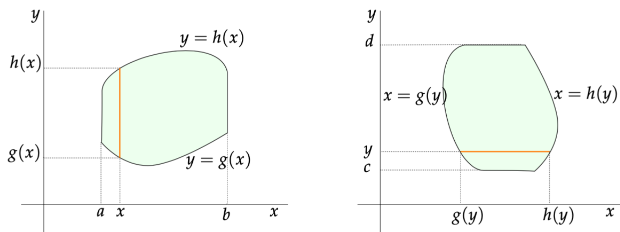
Tính tích phân $\iint_R (4 - 2y)\,\mathrm{d}A$ *với* $R = [0,1] \times [0,1]$.



Trên $[0,1] \times [0,1]$, ta thấy $4 - 2y > 0$, nên ta xem tích phân đã cho như là thể tích của khối hình thang vuông chiều cao 1 và đáy là hình thang với hai đáy 4 và 2, cao là 1. Ta có:

$$\iint_R (4 - 2y)\,\mathrm{d}A = \frac{(4+2)\cdot 1}{2} \cdot 1 = 3. \qquad \square$$

Miền đơn giản theo chiều đứng trong $\mathbb{R}^2$



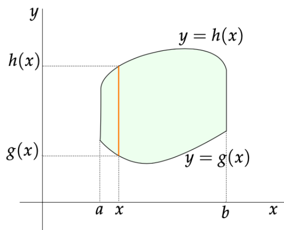
Hình: Miền đơn giản theo chiều đứng (bên trái) và miền đơn giản theo chiều ngang (bên phải)

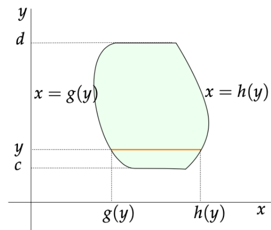
Một tập con của $\mathbb{R}^2$ được gọi là một miền đơn giản theo chiều đứng (vertically simple region) nếu nó có dạng

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Đây là một miền giữa hai đồ thị có cùng miền xác định. Một đường thẳng đứng nếu cắt miền này thì phần giao là một đoạn thẳng.

Miền đơn giản theo chiều ngang trong $\mathbb{R}^2$





Hình: Miền đơn giản theo chiều đứng (bên trái) và miền đơn giản theo chiều ngang (bên phải)

Tương tự, một tập con của $\mathbb{R}^2$ được gọi là một miền đơn giản theo chiều ngang (horizontally simple region) nếu nó có dạng

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \leq y \leq d,\ g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

Mệnh đề 4.5

Cho miền đơn giản theo chiều đứng

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}.$$

Giả sử f, g, *và* h *liên tục. Khi đó,*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Tương tự, nếu ta có miền đơn giản theo chiều ngang

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \le y \le d,\ g(y) \le x \le h(y)\}$$

với f, g, *và* h *liên tục, thì ta có:*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh cho miền đơn giản theo chiều đứng. Miền đơn giản theo chiều ngang được chứng minh tương tự.

• Với giả thiết thì ta sẽ thấy miền D có diện tích. Thật vậy, do g và h bị chặn nên D cũng bị chặn. Ta cần chứng minh $|\partial D| = 0$.

Ta kiểm tra rằng $\mathring{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a < x < b,\ g(x) < y < h(x)\}$. Thật vậy, giả sử $a < x_0 < b$ và $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$, nên tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho

$$g(x_0) < y_0 - \epsilon \quad \text{và} \quad h(x_0) > y_0 + \epsilon.$$

Do g và h liên tục nên có khoảng mở $\mathcal{U}$ chứa x_0 sao cho với $x \in \mathcal{U}$ thì

$$g(x) < y_0 - \epsilon \quad \text{và} \quad h(x) > y_0 + \epsilon.$$

Vì vậy, hình chữ nhật mở $\mathcal{U} \times (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ được chứa trong D và cũng là lân cận mở của điểm (x_0, y_0).

Từ đây, ta suy ra ∂D là hội của đồ thị của g, của h, và hai đoạn thẳng

$$\{(a, y) \,|\, g(a) \le y \le h(a)\} \quad \text{và} \quad \{(b, y) \,|\, g(b) \le y \le h(b)\}.$$

Các tập này có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$, nên tập D có diện tích.

• Lấy một hình chữ nhật $I = [a, b] \times [c, d]$ chứa D. Gọi F là mở rộng của f lên I (bằng 0 ngoài D).

Vì f liên tục trên tập D có diện tích, nên f khả tích trên D. Do đó, hàm F cũng khả tích trên hình hộp I. Ngoài ra, tích phân

$$\int_c^d F(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

tồn tại.

Áp dụng công thức Fubini cho F, ta có:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_I F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Đây là điều cần chứng minh. 

Ví dụ: miền đơn giản theo chiều đứng

Tính tích phân

$$\iint_D (x + 2y)\,\mathrm{d}A,$$

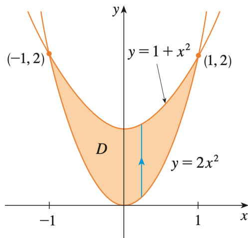
trong đó miền D *bị chặn bởi hai parabolas* $y = 2x^2$ *và* $y = 1 + x^2$.

Đầu tiên, ta cần xác định miền D và xem có thể biểu diễn D là miền đơn giản theo chiều đứng hay chiều ngang.

Giao điểm của $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$ là:

$$2x^2 = 1 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \Rightarrow y = 2.$$

Tọa độ giao điểm là $(1, 2)$ và $(-1, 2)$.



Ta biểu diễn miền D là đơn giản theo chiều đứng:

$$D = \left\{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le 1 + x^2\right\}.$$

Ta tính tích phân:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x + 2y)\, \mathrm{d}A &= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left(xy + y^2\right)\Big|_{y=2x^2}^{y=1+x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left[x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x \cdot 2x^2 - (2x^2)^2\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, \mathrm{d}x \\
&= \left(-3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{32}{15}.
\end{aligned}$$



Ví dụ: miền đơn giản theo cả hai chiều

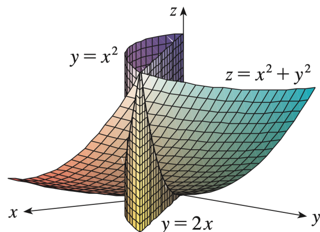
Tìm thể tích của hình khối nằm bên dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$ *và bên trên miền* D *trong mặt phẳng* xy *bị chặn bởi đường thẳng* $y = 2x$ *và parabola* $y = x^2$.

Vì $z \geq 0$, nên thể tích được yêu cầu chính là tích phân $\iint_D \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}A$.

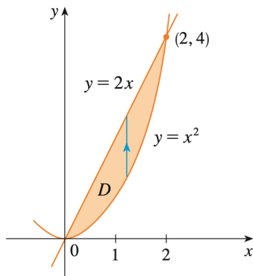
Giao điểm của hai đường $y = 2x$ và $y = x^2$ là:

$$2x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2,$$

và tọa độ giao điểm $(0, 0)$ và $(2, 4)$.



Cách 1:



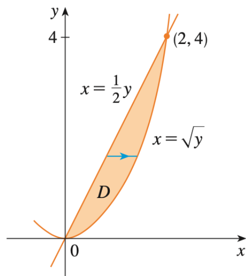
Ta biểu diễn miền D theo chiều đứng:

$$D = \left\{(x, y) \,|\, 0 \leq x \leq 2,\; x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Thể tích của khối cần tìm là:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}A &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=2x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left(-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{216}{35}.
\end{aligned}$$

Cách 2:



Ta biểu diễn miền D theo chiều ngang:

$$D = \left\{ (x, y) \,|\, 0 \le y \le 4,\ \frac{1}{2}y \le x \le \sqrt{y} \right\}.$$

Thể tích của khối cần tìm là:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}A &= \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} \left(x^2 + y^2\right)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Bigg|_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{2}{15} y^{5/2} + \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{13}{96} y^4 \right) \Bigg|_0^4 = \frac{216}{35}.
\end{aligned}$$



Ví dụ: chọn cách biểu diễn miền để dễ tính hơn

Tính tích phân

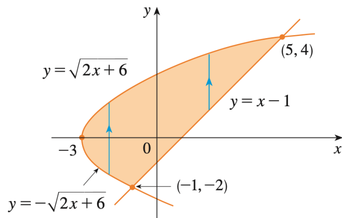
$$\iint_D xy\,\mathrm{d}A,$$

trong đó D *là miền bị chặn bởi đường thẳng* $y = x - 1$ *và parabola* $y^2 = 2x + 6$.

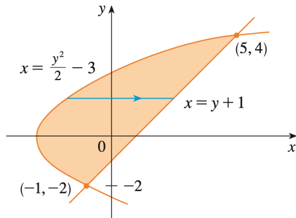
Giao điểm của $y = x - 1$ và $y^2 = 2x + 6$:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= 2x + 6 \\ \Leftrightarrow\ x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow\ x = -1 \ &\vee\ x = 5. \end{aligned}$$

Do đó, tọa độ giao điểm là $(-1, -2)$ và $(5, 4)$.



(a) Miền D đơn giản theo chiều đứng



(b) Miền D đơn giản theo chiều ngang

Nếu ta biểu diễn D là miền đơn giản theo chiều đứng thì

$$D = \left\{(x, y) \mid -3 \leq x \leq -1,\ -\sqrt{2x+6} \leq y \leq \sqrt{2x+6}\right\}$$
$$\bigcup \left\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 5,\ x-1 \leq y \leq \sqrt{2x+6}\right\},$$

và tích phân cần tính là:

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}A = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{5} \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Nếu ta biểu diễn D là miền đơn giản theo chiều ngang thì

$$D = \left\{(x, y) \mid -2 \leq y \leq 4,\ \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1\right\},$$

và tích phân cần tính là:

$$\begin{aligned}
\iint_D xy \, \mathrm{d}A &= \int_{-2}^{4} \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{4} \left(\frac{1}{2}x^2 y\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y\right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2\right)\Bigg|_{-2}^{4} \\
&= 36.
\end{aligned}$$

